جامعة البعث كليـة العلـوم قسم الرياضيات	امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2014 - 2015 أسئلة مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعة ونصف العلامة: 100 درجة الاسم: براءة بوشتر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة {0, 2} هي زمرة جزئية من الزمرة Z_6 .

(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_4(20)$ من الزمرة $U(20)$ يساوي 5.

(3) مرتبة العنصر (-1) في الزمرة $(Q , +)$ تساوي 2.

(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = \{1, 11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 8 .

(5) إن العنصر a^3 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 21 .

(6) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^5 في G تساوي 12.

(7) عدد عناصر زمرة الخارج $Z_{30}/_{< 6 >}$ يساوي 5 .

(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة اولر $U(7)$ يساوي 6 .

(9) عدد الزمر الجزئية في زمرة الخارج $U(20)/_{U_5(20)}$ يساوي 4 .

(10) إذا كان $\varphi: U(30) \to U(30)$ تشاكلا وكان $Ker\ \varphi = \{1, 11\}$ و $\varphi(7) = 7$ فإن $\varphi^{-1}(7) = 7 \cdot ker\ \varphi$.

(11) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12.

(12) إن الزمرة $Z \oplus Z$ دوارة لأن Z زمرة دوارة.

(13) رتبة العنصر (3 , 2) من الزمرة $Z_3 \oplus Z_4$ يساوي 6 .

(14) إن $Z_2 \oplus Z_2 \cong U(8)$.

$Z(G) = \{ a ; a \in G ; ax = xa ; \forall x \in G$

السؤال الثاني (28 درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G، علل صحة ما يلي:

(1) أياً كان $a \in G$، فإن المجموعة $C(a) = \{x : x \in G; ax = xa \}$ هي زمرة جزئية من G.

(2) إذا كان $a , b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ فإن $a . b = b . a$.

(3) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .

(4) كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري غامر.

$a . b \in Z(G) \Rightarrow a, b \in Z(G)$
$a \in Z(G) \Rightarrow a . b = ba ;$
$\forall b \in G$

السؤال الثالث (30 درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة منتهية ما.

(1) اذكر نص مبرهنة لاغرانج وبرهانها ثم اذكر نص عكسها .

(2) إذا كانت مرتبة G تساوي pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان، فإن مرتبة مركز الزمرة G $(Z(G))$ ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .

(3) لتكن مرتبة G تقبل القسمة على العدد الأولي P. عرف الـ P- زمرة سيلوفية ، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 15.

2015 - 7 - 12

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة

م

جامعة البعث
كليـة العلـوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2012 – 2013
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

العلامة: 100 درجة
الاسم: دراوك الأشقر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $3Z \cap 5Z = 8Z$.

(2) إن نظير العنصر 13 في زمرة اولر $U(21)$ هو 5 .

(3) مرتبة العنصر $<8>+14$ في زمرة الخارج $Z_{24}/<8>$ تساوي 3 .

(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=<3>$ في الزمرة Z_{18} يساوي **18** .

(5) جميع عناصر زمرة الخارج $U(20)/H = U_5(20)$ هم $\{ H , 3H , 7H \}$.

(6) إذا كانت G زمرة مرتبتها 29 فإن G لا تكون زمرة دوارة .

(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(10)$ يساوي 5 زمر جزئية.

(8) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_{20} التي لا تساوي 1 هي أعداد أولية.

(9) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولدين فقط .

(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{15} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 15.

(11) إن $U(8) \cong U(10)$ لأن للزمرتين الرتبة نفسها.

(12) توجد 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 واحدة فقط في الزمرة G التي مرتبتها 15 .

السؤال الثاني (24درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما، علل صحة ما يلي:

(1) إن مركز الزمرة $Z(G)$ هو زمرة جزئية من G، حيث $Z(G)=\{a\in G;\ ax=xa,\ \forall x\in G\}$.

(2) إذا كانت $G=<a>$ زمرة دوارة حيث $a\in G$ مرتبته n ، فإن مرتبة الزمرة G تساوي n.

(3) كل زمرة دوارة هي زمرة تبديلية .

(4) جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية متماثلة (ايزومورفية مع بعضها) .

السؤال الثالث (40درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما. أثبت ما يلي:

(1) إذا كانت G منتهية فإن مرتبة أي زمرة جزئية H من G تقسم مرتبة الزمرة G. لاغرانج

(2) كل زمرة جزئية ناظميه في الزمرة G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

(3) إذا كانت A زمرة جزئية ناظمية في G ودوارة، فإن أية زمرة جزئية من A تكون ناظمية في G.

(4) إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية في G، و P عدداً أولياً ، وكان كل من K وزمرة الخارج G/K ، P- زمرة، فإن الزمرة G تكون P– زمرة .

2013 – 7 - 4

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث — امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2010 - 2011 — المدة: ساعتان
كليـة العلـوم — أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1) — العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات — سنة ثانية رياضيات — الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $(Z_n , +)$ حيث $n > 1$ ، زمرة جزئية من $(Z , +)$.

(2) إن عناصر الزمرة الجزئية $U_3(21)$ من الزمرة $U(21)$ هي {1, 4 10, 13, 16 } فقط.

(3) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية **8Z** في الزمرة $(2Z , +)$ يساوي **3** .

(4) عدد الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة $G = <a>$ والتي مرتبتها **20** يساوي **8** زمر جزئية.

(5) $6Z \cap 3Z = 3Z$.

(6) الزمرة $Z_3 \oplus Z_5$ زمرة دوارة .

(7) عدد مولدات الزمرة الجمعية Z_8 يساوي **3** .

(8) رتبة زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ تساوي **5** .

(9) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_{10} يساوي **20** .

(10) أياً كان $k \in U(8)$ فإن $U(8) \neq <k>$ (الزمرة المولدة بـ k) .

(11) مرتبة العنصر (1,3) في الزمرة $Z_2 \oplus Z_4$ تساوي 2 .

(12) $Z_{27} \cong Z_3 \oplus Z_9$.

السؤال الثاني (30 درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما ، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كان $a \in G$ ، فإن $<a> = <a^{-1}>$.

(2) إذا كان $a \in G$ مرتبته n ، وإذا وجد $k \in Z$ يحقق $a^k = e$ فإن n يقسم k.

(3) إذا كانت G منتهية مرتبتها عدد أولي فإنها تكون دوارة.

(4) إذا كانت H زمرة جزئية من G، وكان $(G:H) = 2$، فإن H ناظمية في G.

(5) كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

السؤال الثالث (24 درجة): لتكن G زمرة ما، ولتكن المجموعة $Z(G)=\{a\in G;\ ax=xa,\ \forall x\in G\}$.

(1) أثبت أن الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .

(2) أثبت أنه إذا كانت زمرة الخارج $G/Z(G)$ دوارة، فإن الزمرة G تبديلية .

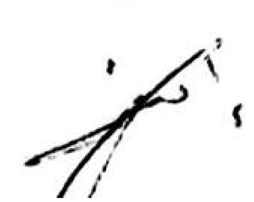
(3) إذا كانت **G** زمرة منتهية وغير تبديلية مرتبتها p^3 ، حيث **p** عدد أولي، فأثبت أنه إذا كان $Z(G) \neq <e>$ فإن $(Z(G) : 1) = p$.

السؤال الرابع (10 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P .
اذكر نص عكس مبرهنة لاغرانج، ثم عرف الـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G ، و ادرس الزمرة التي مرتبتها 15 ؛ وحدد الـ P- زمر جزئية سيلوفية فيها وهل G تحوي زمرة جزئية ناظمية، وضح ذلك.

2011 – 1 - 16

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة



جامعة البعث — امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2009 - 2010 — المدة: ساعتان
كلية العلوم — أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1) — العلامة: 80 درجة
قسم الرياضيات — سنة ثانية رياضيات — الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $2Z \cup 8Z$ زمرة جزئية في Z وتساوي الزمرة 8Z.

(2) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_{20} أعداد أولية .

(3) المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية {11 , 1}=H من الزمرة U(30) هي 1H، 7H فقط.

(4) رتبة العنصر 14 في الزمرة U(15) بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 تساوي 3.

(5) عدد الزمر الجزئية في الزمرة Z_{10} يساوي 10 زمر جزئية.

(6) إن $5 = \emptyset(10)$ حيث $\emptyset$ هو تابع اولر .

(7) كل زمرة دوارة غير منتهية لها 4 مولدات .

(8) U(14) زمرة دوارة .

(9) مرتبة العنصر $<6>+5$ في زمرة الخارج $Z_{18}/<6>$ تساوي 5 .

(10) عدد عناصر زمرة الخارج $<4>/<20>$ تساوي 4.

(11) الزمرة الجزئية $H = <6>$ في الزمرة Z_{18} ليست ناظمية فيها.

(12) $Z_4 \cong U(8)$.

السؤال الثاني (15 درجة): علل صحة ما يلي:

لتكن $(G , \cdot)$ زمرة و $a \in G$ مرتبته n .

(1) أياً ،كان العدد الصحيح s حيث $1 \leq s \leq n$ فإن $o(a^s) = o(a^{n-s})$.

(2) إذا وجد $k \in Z$ بحيث $a^k = e$ فإن n يقسم k.

(3) إذا كانت $G/Z(G)$ دوارة فإن G تبديلية.

السؤال الثالث (14 درجة): لتكن G زمرة و H , K زمرتين جزئيتين من G.

إذا كانت الزمرة الجزئية K ناظمية في G، فأثبت أن :

$$HK/K \approx H/H\cap K$$

السؤال الرابع (15 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P .

عرف الـ p- زمرة والـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G ، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 48 ، وحدد الـ P-زمر جزئية سيلوفية فيها.

2010 – 1 - 4

مع أطيب التمنيات

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2008 – 2009
أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعتان
العلامة: 80 درجة
الاسم: ردينة مراد

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):
أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

١. $(\{6^n \setminus n \in Z\},\cdot)$ زمرة جزئية من الزمرة $(Q^+,\cdot)$.
٢. 8 يولد زمرة جزئية من الزمرة Z_{12} مرتبتها تساوي 5 .
٣. عدد الزمر الجزئية في الزمرة Z_{18} يساوي 5 زمر جزئية .
٤. جميع مولدات الزمرة Z_{24} أعداد أولية.
٥. $(Q,+)$ زمرة دوارة.
٦. كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولد واحد فقط.
٧. عدد مرافقات الزمرة الجزئية $4Z$ في الزمرة $2Z$ يساوي 4 .
٨. $Z_9 \cong Z_3 \oplus Z_3$.
٩. رتبة العنصر $(2,3)$ في الزمرة $Z_6 \oplus Z_{15}$ تساوي 15 .
١٠. رتبة العنصر 2 في الزمرة $U(15)$ بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 تساوي 6 .
١١. رتبة أي عنصر من عناصر الزمرة غير المنتهية $(Q^*,\cdot)$ غير منتهية.
١٢. إذا كانت $G = \langle a\rangle$ زمرة دوارة مرتبتها 20، فإن جميع الزمر الجزئية فيها هم:
$\langle a\rangle , \langle a^2\rangle , \langle a^4\rangle , \langle a^5\rangle , \langle a^{10}\rangle$.

السؤال الثاني (20 درجة): علل ما يلي :
١. إذا كانت G زمرة، فإن المجموعة $Z(G)=\{a : a\in G \,;\, ax = xa ,\ \forall\, x\in G\}$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G.
٢. كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.
٣. إذا كانت G زمرة دوارة مولدة بالعنصر a من G وغير منتهية، فإن التطبيق: $f: Z \to G$ المعرف بالشكل أياً كان $n \in Z$ فإن $f(n) = a^n$ ، يكون تقابل.

السؤال الثالث (24 درجة): لتكن G زمرة منتهية و p عدداً أولياً .
متى نقول عن G إنها p- زمرة .
١. إذا كانت G p- زمرة، فأثبت أن كل زمرة جزئية في G هي p- زمرة.
٢. إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية من G، وكان كل من K و زمرة الخارج G/K p- زمرة ، فأثبت أن الزمرة G تكون p- زمرة.

حمص 29 – 1 – 2009

مع أطيب الأمنيات
د. إيمان الخوجة

جامعة البعث	امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2008 - 2009	المدة: ساعتان
كلية العلوم	أسئلة الدورة الثانية لمقرر البنى الجبرية (1)	العلامة: 80 درجة
قسم الرياضيات	سنة ثانية رياضيات	الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $2Z \cup 5Z$ زمرة جزئية في Z .

(2) $(12Z,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(24Z,+)$.

(3) عدد عناصر الزمرة الجزئية الدوارة من الزمرة Z_{42} والمولدة بالعدد 30 يساوي 5 .

(4) عدد الزمر الجزئية في الزمرة Z_{12} يساوي 12 زمرة جزئية.

(5) كل زمرة تبديلية هي زمرة دوارة .

(6) كل زمرة دوارة غير منتهية لها 4 مولدات .

(7) عدد مرافقات الزمرة الجزئية المولدة بالعدد 2 من الزمرة Z_{12} يساوي 6.

(8) رتبة زمرة الخارج $Z_6/<3>$ تساوي 3 .

(9) مرتبة الزمرة $Z_{12} \oplus Z_{15}$ تساوي 60 .

(10) رتبة العنصر 7 في الزمرة $U(15)$ بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 تساوي 4.

(11) مرتبة أي عنصر مغاير للصفر في زمرة الأعداد الصحيحة Z غير منتهية.

(12) $Z_6 \cong Z_2 \oplus Z_3$.

السؤال الثاني (14 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت $H = \{x : x \in U(20);\ x \equiv 1 \bmod 3\}$ ، حيث $U(20)$ زمرة أولر بالنسبة للضرب بالمقاس 20. بين أن H ليست زمرة جزئية من الزمرة $U(20)$.

(2) إذا كانت $(G,\cdot)$ زمرة منتهية مرتبتها n ، عندئذ أياً كان $a \in G$ فإن: $a^n = e$.

السؤال الثالث (14 درجة): ليكن $f : G \to G'$ هومومورفيزماً زمرياً:

(1) أثبت أن كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

(2) أثبت أن $G/\ker f \cong \operatorname{Im} f$.

السؤال الرابع (16 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P .
عرف الـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G ، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 40 ، وحدد الـ p- زمر جزئية سيلوفية فيها.

مع أطيب التمنيات

د. إيمان الخوجة

2009 - 6 - 21

جامعة البعث امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2007 – 2008
كلية العلوم أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1) العلامة: 80 درجة
قسم الرياضيات سنة ثانية رياضيات الاسم: مرسال محمد أبو مرير

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ لكل مما يلي ، مع ذكر التصويب أو التعليل لحالة الخطأ فقط:

(1) مجموعة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر R^* مغلقة بالنسبة لعملية الجمع (+).

(2) $(12Z , +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(6Z , +)$.

(3) رتبة الزمرة الجزئية المولدة بالعدد 3 من الزمرة $(Z_4 , +)$ تساوي 2 .

(4) كل زمرة تبديلية هي زمرة دوارة .

(5) عدد مولدات الزمرة الدوارة التي مرتبتها 8 يساوي 3.

(6) إن عدد جميع الزمر الجزئية في الزمرة Z_6 يساوي 3.

(7) مرافقات الزمرة الجزئية $(4Z , +)$ في الزمرة $(2Z , +)$ هي :
$0+4Z \,,\, 1+4Z \,,\, 2+4Z \,,\, 3+4Z$

(8) $Z_6 \cong Z_2 \oplus Z_3$.

(9) رتبة العنصر $(0,6)$ في الزمرة $Z_4 \oplus Z_{12}$ تساوي 2 .

(10) مرتبة الزمرة $Z_{12} \oplus Z_{15}$ تساوي 60 .

(11) يمكن أن تكون نواة الهومومورفيزم الزمري مجموعة خالية .

(12) $(Z,+) \cong (Q,+)$ حيث Q مجموعة الأعداد العادية .

السؤال الثاني (24 درجة):

لتكن G زمرة و A , B زمرتين جزئيتين من الزمرة G.

(أ) إذا كان $AB = BA$ ، فأثبت أن الجداء AB زمرة جزئية في G.

(ب) إذا كانت كل من الزمرتين A , B ناظمية في G ، فأثبت أن الجداء AB زمرة جزئية ناظمية في G.

(جـ) إذا كانت كل من الزمرتين A , B تبديلية و ناظمية في G ، وإذا كان $A \cap B = < e >$ ، فأثبت أن الجداء AB هو زمرة تبديلية .

السؤال الثالث (20 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p .

عرف الـ p- زمر جزئية سيلوفية في G ، ثم برهن ما يلي:

(أ) إذا كانت K هي p- زمرة جزئية سيلوفية و ناظمية في G ، فأثبت أنه لايوجد في G سوى p- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي K.

(ب) ادرس الزمرة التي مرتبتها 15 و حدد الـ p- زمر جزئية سيلوفية فيها .

حمص 28 – 1 – 2008

مع أطيب الأمنيات بالنجاح والتوفيق
د . إيمان الخوجة

سلم تصحيح مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات

2008 - 2007

الفصل الأول

الجواب الأول: 36 درجة لكل حالة ثلاث درجات

(1) خطأ مثلاً $-2, +2 \in R^*$ لكن $(-2)+(+2) = 0 \notin R^*$

(2) صح

(3) خطأ هي الزمرة الجزئية فقط حيث 3، 4 أولیان نسبياً

(4) خطأ $(Q^*, \cdot)$ زمرة تبديلية وليست دوارة أو $(Q, +)$.

(5) خطأ يساوي اربعة

(6) خطأ يساوي أربعة وهي

(7) خطأ المرافقات هي $\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle, \langle 3 \rangle$

$0+4Z$, $2+4Z$

(8) صح

(9) صح

(10) خطأ تساوي 180

(11) خطأ لأن $f(e) = e'$ على الأقل مجموعة فيها e ما يلد المنطلق

(12) خطأ Z دوارة و Q غير دوارة

الجواب الثاني 24 درجة

(أ): $AB \neq \phi$. ليكن $x, y \in AB$ عندئذ $x = ab$ و $y = a'b'$

(8) حيث $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$ ومنه نجد $xy^{-1} = a\underbrace{(bb'^{-1})}_{b_0}a'^{-1} = ab_0a'^{-1}$

وبما أن $b_0a'^{-1} \in BA = AB$ فإنه يوجد $a_0 \in A, b_1 \in B$ بحيث $b_0a'^{-1} = a_0b_1$

وهذا يبين لنا أن $xy^{-1} = ab_0a'^{-1} = aa_0b_1 \in AB$. إذاً AB زمرة جزئية في G.

(ب) [illegible] لنبرهن أن $\forall g \in G : g(AB)g^{-1} \subseteq AB$، ليكن $x \in g(AB)g^{-1}$ عندئذ

(8) يوجد $a \in A, b \in B$ بحيث $x = g(ab)g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1}) \in AB$

[illegible]

(جـ) أيا كان $a\in A, b\in B$ فإن

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1} \in B$$

(8) كذلك

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(ba^{-1}b^{-1}) \in A$$

وبما أن $A\cap B=\{e\}$ نجد أن $ab=ba$ إذاً AB زمرة تبديلية.

الجواب الثالث 20 درجة

(5) الـ p- زمرة سيلوفية من G هي الزمرة التي مرتبتها تماثل أكبر قوة للعدد الأولي تقسم مرتبة الزمرة G .

أي إذا كان p^k حيث $k\geq 1$ يقسم مرتبة الزمرة G و p^{k+1} لا يقسم مرتبة الزمرة G عندئذ أي زمرة جزئية من G مرتبتها p^k تسمى p- زمرة جزئية سيلوفية من G .

(أ) لتكن H p- زمرة جزئية سيلوفية أخرى في G عندئذ K و H مترافقتان

(7) لأن كل p- زمر سيلوفية [مترافقة] وبالتالي يوجد $x\in G$ بحيث $H = xKx^{-1}$

ومن كون K ناظمية في G نجد أن $H = xKx^{-1} = K$.

(ب) بما أن $(G:1)=15=3.5$ عندئذ G تحوي 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 واحدة. 5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5

(8) إن عدد جميع الـ 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها تماثل 3 يعطى بالعلاقة $1+k3$ ويجب أن يقسم مرتبة G . من أجل $k\neq 0$ فإن $1+k3$ لا يقسم مرتبة الزمرة G إذاً توجد 3- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط من G .

كما أن عدد جميع الـ 5- زمرة جزئية سيلوفية التي مرتبتها تماثل 5 واحد فقط لأنه من أجل $k\neq 0$ فإن $1+k5$ لا يقسم مرتبة G .

2007 - 6 - 19

د. إيمان الخوص

جامعة البعث امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2006 – 2007
كلية العلوم أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1) العلامة: 80 درجة
قسم الرياضيات سنة ثانية رياضيات الاسم: رهف العبد الله

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (30 درجة): لتكن $(G,\cdot)$ زمرة ما
أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ:
(1) العنصر الأعظمي في المجموعة المرتبة إن وجد فهو وحيد .
(2) الفترة الحقيقية المغلقة [1 , 0] هي مجموعة مرتبة جيداً.
(3) اجتماع زمرتين جزئيتين في زمرة هو زمرة جزئية فيها.
(4) كل زمرة دوارة هي زمرة تبديلية.
(5) إن مرتبة كل عنصر من عناصر الزمرة غير المنتهية تكون غير محدودة.
(6) كل زمرة جزئية من زمرة دوارة تكون زمرة دوارة.
(7) إن مولدات الزمرة الجمعية $(Z_8 , +)$ هي فقط 1 و 5 .
(8) كل زمرة دوارة ومنتهية تكون إيزومورفية مع الزمرة الجمعية $(Z,+)$.
(9) إذا كانت A , B زمرتين جزئيتين من الزمرة G و B ناظمية في G فإن $B\cdot A$ زمرة جزئية في G.
(10) إذا كانت الزمرة الجزئية A ناظمية في G فإن أية زمرة جزئية في A تكون ناظمية في G.
ملاحظة: كل إجابة خطأ تذهب إجابة صحيحة.

السؤال الثاني (15 درجة):
لتكن لدينا الزمرة الدوارة غير المنتهية $(G, \cdot)$ المولدة بالعنصر x ولنعرف المجموعة الجزئية H من G كما يلي:
$y \in H \iff y$ هو عنصر مولد للزمرة G . أثبت أن $H=\{ x , x^{-1}\}$.

السؤال الثالث (15 درجة): برهن صحة المبرهنة الآتية:
لتكن G زمرة منتهية من المرتبة n ولتكن H زمرة جزئية اختيارية من G بحيث إن مرتبة H تساوي k عندئذ يقبل العدد n القسمة على k .

السؤال الرابع (20 درجات): لتكن G زمرة منتهية و p عدداً أولياً. متى نسمي G p- زمرة .
عرف الـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G . ثم برهن مايلي:
(أ) إذا كانت G p- زمرة فبرهن أن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة.
(ب) لتكن G زمرة مرتبتها 30. حدد الـ p- زمر جزئية سيلوفية في G حسب مبرهنات سيلوف وذلك بدراسة الزمرة G.

حمص في 15 – 1 – 2007 مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق
د. إيمان الخوجة

سلم تصحيح مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات

الدورة الأولى العام الدراسي 2006 - 2007

الجواب الأول: [30 د] لكل حالة 3 درجات الخطأ يذهب بالصواب

(1) خطأ العنصر الأعظم هو الوحيد ، يمكن أن نجد أكثر من عنصر أعظمي، أو مثال على ذلك.

(2) خطأ يمكن أن نجد مثلاً المجموعة $\{\frac{1}{n}\}$ لا تملك عنصراً أصغرياً

(3) خطأ يكون ذلك إذا كانت إحدى المجموعتين تحتوي بالأخرى [illegible] مثال واحد عدد صحيح $(Z,+)$

(4) صح

(5) خطأ مثال على ذلك $(R^*, .)$ مثلاً (-1) مرتبته 2

(6) صح

(7) خطأ يوجد أيضاً 3 و 7 مولدات الزمرة $(Z_8,+)$ بالإضافة إلى 1 و [illegible]

(8) خطأ تكون الزمرة دورية منتهية مع الزمرة $(\frac{Z}{12Z},+)$ (أو كل زمرة دوارة ولا منتهية [illegible] مع الزمرة $(Z,+)$)

(9) صح

(10) خطأ يجب أن تكون A دوارة

الجواب الثاني (15 درجة): يجب أن نبرهن أن $H = \{x, x^{-1}\}$

أن $x^{-1} \in G$ وبالتالي $<x^{-1}> \subseteq G$ ولنبرهن العكس. ليكن $a \in G$

عندئذ $a = x^{z}$ حيث $z \in Z$ ومنه $a = (x^{-1})^{-z} \in <x^{-1}>$ ومن ثم فإن $G \subseteq <x^{-1}>$

مما سبق نجد $G = <x^{-1}>$ أي أن x^{-1} يولد G ولما كان x يولد G فإن $\{x, x^{-1}\} \subseteq$ 2

وبالعكس ليكن $y \in H$ عندئذ $G = <y>$ حسب الفرض ومنه يوجد عددان صحيحان u, v بحيث يكون $y = x^{v}$ و $x = y^{u}$ وبالتالي يكون $x = x^{uv}$. إذاً

لأن مرتبة x غير محدودة ومنه $v = \mp 1$ وبالتالي $y \in \{x, x^{-1}\}$ إذاً

الجواب الثالث: (15 درجة) لنأخذ المجموعات المرافقة اليسارية للزمرة الجزئية H في الزمرة

ولنفرض أن عدد هذه المجموعات هو m ، أي أن m هو دليل H في G. وبما أن $card\, xH = card\, H$

لذا فإن كل مجموعة مرافقة يسارية xH فإننا نستنتج أن كل مجموعة يسارية xH تتألف من k عنصراً، ولما كان $G = H \cup x_2H \cup \dots \cup x_m H$ فإنه

[illegible]

الجواب الرابع (20 درجة)

نقول عن الزمرة المنتهية G إنها p- زمرة إذا كانت مرتبتها قوة لـ p 3

أي إذا كانت $(G:1) = p^n$ حيث $n \in N$

وإذا كانت مرتبة الزمرة المنتهية G تقبل القسمة على العدد الأولي p وكانت p^k ($k \geq 1$) يقسم مرتبة الزمرة G و p^{k+1} لا يقسم مرتبة الزمرة G عندئذ أي زمرة جزئية من G مرتبتها p^k تسمى p- زمرة جزئية سيلوفية من G

أولاً) لتكن G p- زمرة ولنفرض أن $(G:1) = p^n$ حيث $n \in N^*$ ولتكن H زمرة جزئية من الزمرة G عندئذ حسب مبرهنة لاغرانج فإن

$$p^n = (G:1) = (G:H)(H:1) \quad 6$$

وهذا يبين لنا أن $(H:1)$ تقسم المقدار p^n ومنه $(H:1) = p^s$ حيث $s \leq n$

ومنه الزمرة الجزئية H هي p- زمرة.

برهان ب) $(G:1) = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ومجموعة قواسم العدد 30 هي 2 و 3 و 5 و 6 و 10 و 15 و 30 و 1

2- زمرة جزئية سيلوفية إما 1 أو 3 أو 5 أو 15

وحسب مبرهنة سيلو الأولى فإن الزمرة G تحوي 3- زمرة جزئية سيلوفية 4

مرتبتها 3 وأخرى 5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. إن عدد جميع الـ 3

الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 3 يعطى بالعلاقة $3k + 1$ ويجب أن يقسم مرتبة

وبالتالي يوجد في G إما زمرة جزئية واحدة 2 فقط أو 10 زمر جزئية كل منها عبارة عن 3- زمرة

سيلوفية مرتبتها 3 (نلاحظ من أجل $k \neq 3$ و $k \neq 0$ فإن المقدار $3k + 1$ لا يقسم مرتبة الزمرة)

كما أن عدد جميع الـ 5- زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 5 يعطى بالعلاقة $5k$

وهذا العدد يجب أن يقسم مرتبة الزمرة 2 ومنه توجد في G إما زمرة جزئية واحدة فقط أو 6

جزئية كل منها عبارة عن 5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5 (من أجل $k \neq 1$ و $k \neq 0$ العدد

$5k + 1$ لا يقسم مرتبة الزمرة G).

مدرس المادة

2007 - 1 - 15

جامعة البعث	امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2006 – 2007	
كلية العلوم	أسئلة الدورة الثانية لمقرر البنى الجبرية (1)	العلامة: 80 درجة
قسم الرياضيات	سنة ثانية رياضيات	الاسم: غنى الريا سمي

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التصويب أو التعليل لحالة الخطأ فقط:

(١) كل عنصر أصغري يكون عنصراً أصغراً في المجموعة $(M,\leq)$ المرتبة كلياً.

(٢) الفترة الحقيقية المغلقة $[1\ ,\ 0]$ هي مجموعة تحقق الشرط الأصغري.

(٣) إن اجتماع الزمرتين الجزئيتين $2Z$ و$4Z$ في الزمرة $(Z,+)$ هي الزمرة الجزئية $4Z$.

(٤) كل عنصر من عناصر الزمرة الدوارة يولدها.

(٥) عدد مولدات الزمرة الدوارة التي مرتبتها 6 يساوي 3.

(٦) جميع مولدات الزمرة $(Z_{20},+)$ أعداد أولية.

(٧) إن مرتبة كل عنصر من عناصر الزمرة غير المنتهية تكون غير محدودة.

(٨) إن عدد جميع الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة $G = <a>$ والتي مرتبتها 30 يساوي 8.

(٩) الزمرتان الإيزومورفيتان لهما القدرة نفسها والبنية الجبرية نفسها.

(١٠) إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها n وكان m عدداً صحيحاً موجباً يقسم n فإنه توجد زمرة جزئية في G مرتبتها m .

(١١) إذا كانت G زمرة منتهية و p عدداً أولياً فإن عدد جميع الـ p- زمرة جزئية سيلوفية المختلفة في G يقسم مرتبة G ويساوي kp حيث $k \in N$.

(١٢) إذا كانت G زمرة منتهية، و K p- زمرة جزئية سيلوفية ناظمية في G، عندئذ لا يوجد في G سوى p- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي K .

<u>السؤال الثاني (10 درجات):</u>

لتكن G زمرة دوارة غير منتهية مولدة بالعنصر a من G، وليكن $f : Z \to G$ التطبيق المعرف بالشكل : $f(n) = a^n, \quad \forall n \in N$. برهن أن f متباين.

<u>السؤال الثالث (20 درجة):</u>

ليكن $f : G \to G'$ هومومورفيزماً زمرياً .

(أ) برهن أن $\ker f$ زمرة جزئية و ناظمية في G .

(ب) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية في G. برهن أن التطبيق $\pi : G \to G/H$ هومومورفيزماً زمرياً غامراً.

(ج) برهن أن $\ker \pi = H$.

<u>السؤال الرابع (14 درجة):</u>

إذا كان كل من K و H زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G و $G = K \oplus H$ المجموع المباشر للزمرتين K و H أي أن $G = K \cdot K$ و $K \cap H = <e>$. عندئذ :

(أ) أياً كان $h \in H$ و $k \in K$ فبرهن أن $hk = kh$.

(ب) أياً كان $g \in G$ فإن g يكتب بصورة وحيدة على النحو $g = kh$ حيث $k \in K$ و $h \in H$.

حمص 19 – 6 – 2007

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

د . إيمان الخوجة

(١)

يع مقرر البنى الجبرية (١)

رياضيات (صورة المقرر)

العام الدراسي 2006 - 2007

الجواب الأول

ع (1) صح . بارة تلاث بارمات

ع (2) خطأ لو ا.

ع (3) خطأ هي ما الأصغري o لا ينتمي إليا.

ع (4) خطأ يوجد 2Z

ع (5) خطأ مولدا مثلا

ع (6) خطأ لأن رتبة المربي مرتبط 6 يساوي 2.

ع (7) خطأ (مثال أولي)

ع (8) خطأ مولدا بيتهم 2).

ع (9) صح ، مرتبط 30 ثنائيه (عدد الزمر ...)

ع (10) خطأ (ذا ...

ع (11) خطأ عدد جبيع ا. $\{1, 7, 11, 13, 17, 23, 27, 29\}$ → 8

ع (12) صح سيلو فيه في G يساوي $1+kp$

الجواب الثاني [5]

لنفرض جدلاً أن

وأن $f(n) = f(m)$ أي مباين عندئذ يوجد $n, m \in Z$ بحيث $n \neq m$

$a^{n-m} = a^0 = e$ فإن المجموعة ... من أن $n > m$ عندئذ $n-m > 0$. أن

أصغر ... وليكن t . وأن $S = \{k : a^k = e\}$ غير خالية وبالتالي تحوي عنصرا

واضح أن ... $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{t-1}\} \subseteq G$

ليكن $x \in G$ عندئذ $x = a^s$ ، $\{e, a,$

يوجد $q, r \in Z$ بحيث $s = qt + r$ وحسب خوارزمية القسمة

$0 \le r$ ... ⟸ $a^s = a^{qt+r} = a^{qt} \cdot a^r = (a^t)^q a^r = a^r$